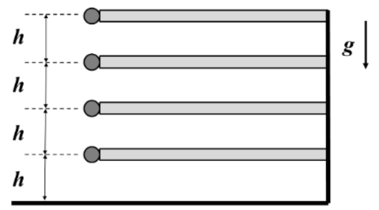
Второй этап (заочный) Всесибирской олимпиады по физике
(25 декабря 2020 г. - 20 января 2021 г.)
Задачи 11 класса

Задача оценивается в 5 баллов при полном решении и правильном ответе в указанных в условии единицах. Если требуется найти несколько величин, то их значения приводятся в ответе через точку с запятой. Числовой ответ, если иное не оговорено в условии, округляется до трёх значащих цифр. Например, полученное расчетом число 328,51 округляется до 329; 2,003 – до 2,00; 5,0081 – до 5,01; 0,60135 – до 0,601, 0,0012345 – до 0,00123 и т.д. Желательно указать наименование единиц, в которых измерена соответствующая физическая величина. Если в условии задачи нет специальных указаний, ответ приводится в единицах системы СИ. Ответ (округлённый) нужно внести в таблицу. При невыполнении любого из требований за задачу ставится 0 баллов. Без представления таблицы работа не проверяется.



1. Четыре одинаковых пластилиновых шарика закреплены один под другим на торцах четырёх книжных полок, как показано на рисунке. Шарики закреплены слабо и при малейшем воздействии готовы упасть. Внезапно верхний шарик срывается, без начальной скорости падает вниз и абсолютно неупруго сталкивается со следующим шариком. Далее слипшиеся шарики продолжают падать вниз, абсолютно неупруго сталкиваясь с остальными шариками. Найдите скорость, которую будут иметь слипшиеся шарики непосредственно перед падением на дно книжного шкафа. Расстояние между книжными полками одинаково, равно расстоянию между нижней полкой и дном, и равно h= 10,9 см. Ускорение свободного падения g = 9,8 м/с^2. Размером шариков пренебречь. Ответ привести с точностью до 2 значащих цифр.

Возможное решение

Скорость верхнего шарика перед первым столкновением будет равна

$$v_1 = \sqrt{2gh}$$

При абсолютно неупругом соударении шариков суммарный импульс сохраняется:

$$mv_1 = 2mu_1$$

где u_1 – скорость слипшихся шариков после первого удара, m – масса шарика.

Перед вторым столкновением скорость двух слипшихся шариков будет равна

$$v_2 = \sqrt{u_1^2 + 2gh}$$

Закон сохранения импульса для второго столкновения:

$$2mv_2 = 3mu_2$$

где u_2 – скорость слипшихся шариков после второго удара.

Перед третьим столкновением скорость двух слипшихся шариков будет равна

$$v_3 = \sqrt{u_2^2 + 2gh}$$

Закон сохранения импульса для третьего столкновения:

$$3mv_3 = 4mu_3$$

где u_3 – скорость слипшихся шариков после третьего удара.

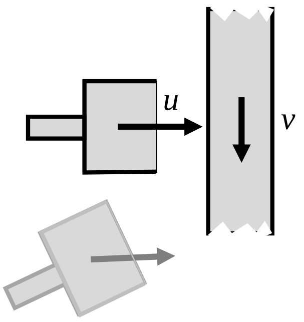
Скорость, которую требуется найти, равна, таким образом:

$$v = \sqrt{u_3^2 + 2gh}$$

Проведя соответствующие вычисления, находим требуемую скорость:

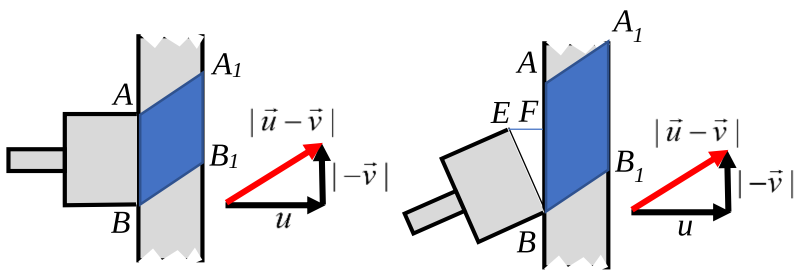
$v = \sqrt{\frac{15gh}{4}} \approx 2$ м/с

Ответ: 2,0 м/с или 2,0.



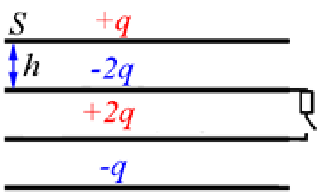
2. Движущаяся со скоростью v = 1 м/с лента транспортера равномерно нагружена сыпучим материалом. В перемещаемый со скоростью u = 1,9 м/с поперек ленты совок, можно собрать m = 1 кг материала. Какая масса этого материала попадет в совок, если его двигать с той же скоростью поперек ленты, но держать под углом α = 30° к ленте? Объем совка не ограничивает количество материала. Ответ приведите с точностью до 3 значащих цифр.

Возможное решение



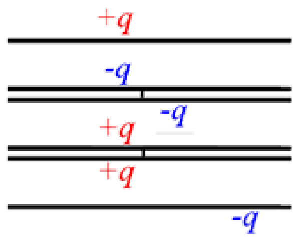
Предположим, что ширина совка D, транспортера - d, а поверхностная плотность материала на ленте транспортера ρ. В первом случае оба конца переднего края совка коснутся транспортера одновременно. Перейдя в систему отсчета, связанную с транспортером, мы увидим, что верхний на рисунке конец кромки совка опишет траекторию AA_1, а нижний - BB_1. Все, что находится внутри параллелограмма AA_1B_1B попадет внутрь совка: $m = \rho Dd$. При движении совка под углом его край E коснется ленты с временной задержкой $t = EF/u = D \cdot \sin\alpha / u$. За это время транспортер пройдет расстояние $AF = vt$, так что сторона AB параллелограмма, образованного точками, находящимися между прорисованными на транспортере траекториями двух краев совка, будет $AB = D\cdot\cos\alpha + D\cdot\sin\alpha\cdot v/u$. В совок попадет, как и в первом случае, весь материал внутри параллелограмма AA_1B_1B: $m_1 = \rho dD(\cos\alpha + \sin\alpha\cdot v/u) = m(\cos\alpha + \sin\alpha\cdot v/u) \approx 1{,}13m$.

Ответ: 1,13 кг или 1,13.



3. Четыре металлических пластины площади $S = 0{,}01$ м^2 каждая расположены на одинаковом расстоянии h = 1 мм друг от друга. На пластинах находятся заряды $+q$ = 0,1 мкКл, $-2q$, $+2q$, $-q$. Сколько тепла выделится, если соединить две средние пластины проводником? Ответ приведите с точностью до трех значащих цифр.

Возможное решение



Можно представить конструкцию, как три последовательно соединенных одинаковых конденсатора. Емкость каждого конденсатора $C = \frac{\varepsilon_0 S}{h}$, заряды у всех q. После соединения средних пластин (замыкания среднего конденсатора) его начальная энергия $W_0 = \frac{q^2}{2C} = \frac{q^2 h}{2\varepsilon_0 S} \approx 5,7 \cdot 10^{-5}$ Дж переходит в тепло.

Ответ: $5{,}65 \cdot 10^{-5}$ Дж или $5{,}65 \cdot 10^{-5}$.

4. Имеется две батарейки с ЭДС $E_1 = 1.5$ В и внутренним сопротивлением $r_1 = 0.5$ Ом и две батарейки с ЭДС $E_2 = 3.6$ В и внутренним сопротивлением $r_2 = 1$ Ом. Предложите схему, выдающую в нагрузке с сопротивлением $R = 2$ Ом максимальную мощность, и найдите эту мощность. Ответ приведите с точностью до трех значащих цифр.

Возможное решение

Мощность в нагрузке равна I^2R, так что нужно максимизировать ток в нагрузке. Очевидно, что соединять параллельно батарейки с разными ЭДС бессмысленно. Поэтому получаем четыре возможных варианта схемы:

1. все батарейки соединены последовательно
2. две батарейки с E_1 последовательно, две батарейки с E_2 параллельно
3. две батарейки с E_2 последовательно, две батарейки с E_1 параллельно
4. две батарейки с E_1 параллельно, две батарейки с E_2 тоже параллельно

В случае 1 получаем ток $I_1 = \frac{2E_1 + 2E_2}{2r_1 + 2r_2 + R} = \frac{10.2}{5} = 2.04$ А.

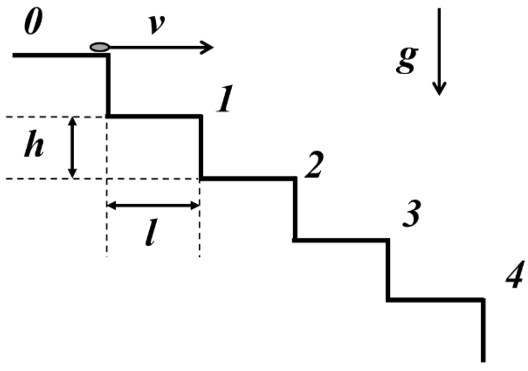
В случае 3 ток равен $I_2 = \frac{E_1 + 2E_2}{r_1/2 + 2r_2 + R} = \frac{8.7}{4.25} \approx 2.047$ А.

В остальных случаях ток получается меньше.

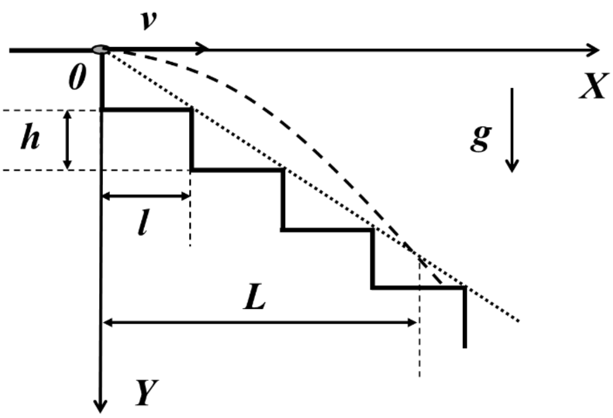
Максимальная мощность равна $N_{\max} = I_2^2 R \approx 8.38$ Вт, в случае 1 получается приблизительно 8.32 Вт.

Ответ: **8,38 Вт или 8,38** .

5. На краю лестницы с большим количеством одинаковых ступенек покоится небольшой камешек. В результате мгновенного удара камешек приобретает горизонтальную скорость $v = 5$ *м/с*. Рассчитайте номер ступеньки, на которую он упадёт. Изначально камешек находился на краю нулевой ступеньки. Высота каждой ступеньки $h = 20$ *см*, длина $l = 40$ *см*. Ускорение свободного падения $g = 9{,}8$ *м/с*^{2}.



Возможное решение



Введём систему координат, начало которой будет в начальном положении камешка, ось OX – горизонтальна и направлена вправо, ось OY – вертикальна и направлена вниз. Траекторией движения камешка будет парабола. Если камешек пересечёт прямую линию, проходящую через правые крайние точки ступенек (пунктирная линия на рисунке), то он упадёт на ступеньку, расположенную непосредственно под точкой пересечения его траектории и этой линии.

Уравнения движения камешка имеют вид:

$$\begin{cases} x = vt \\ y = \dfrac{gt^2}{2} \end{cases}$$

где t – время, отсчитываемое от момента начала движения камешка.

Уравнение прямой линии, проходящей через крайние точки ступенек, имеет вид:

$$y_0 = \frac{h}{l}x$$

Пусть t_0 – момент времени, когда камешек пересечёт линию. Тогда условие пересечения параболической траектории камешка и прямой линии приведёт к следующим равенствам:

$$y_0 = \frac{gt_0^2}{2} = \frac{h}{l}vt_0$$

Отсюда

$$t_0 = \frac{2hv}{gl}$$

Расстояние по горизонтали между начальной точкой и точкой пересечения камешка и прямой равно

$$L = vt_0 = \frac{2hv^2}{gl}$$

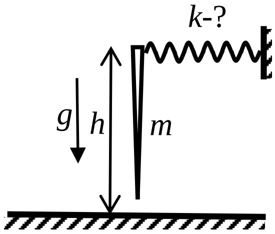
Количество ступенек, которые по горизонтали преодолеет камешек к моменту t_0 , равно целой части отношения *L/l*. Таким образом, камешек упадёт на ступеньку с номером

$$n_0 = \left[\frac{2hv^2}{gl^2}\right] + 1$$

где квадратными скобками обозначена операция взятия целой части.

С учётом данных в условии параметров задачи, находим, что камешек упадёт на ступеньку с номером 7.

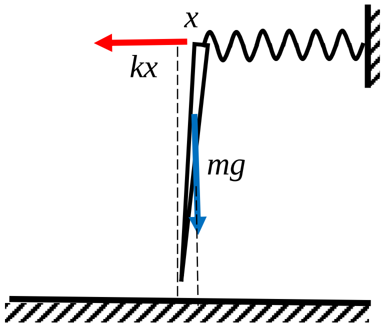
Ответ: **7.**



6. Если лезвие ножа с сечением в форме равнобедренного треугольника с высотой h = 3 см поставить на острие, оно упадет. Его можно удержать от падения из вертикального положения с помощью достаточно жесткой горизонтальной пружины, соединяющей лезвие с неподвижной опорой (см. рис.). Определите минимально необходимую жесткость этой пружины, если масса лезвия m = 100 г, угол острия пренебрежимо мал, а ускорение свободного падения g = 9,8 м/с^2. Пружина невесомая. Ответ привести с точностью 3 значащих цифр.

Возможное решение

Центр тяжести лезвия с треугольным сечением находится в точке пересечения медиан треугольника на расстоянии $\frac{2}{3}h$ от острия лезвия.

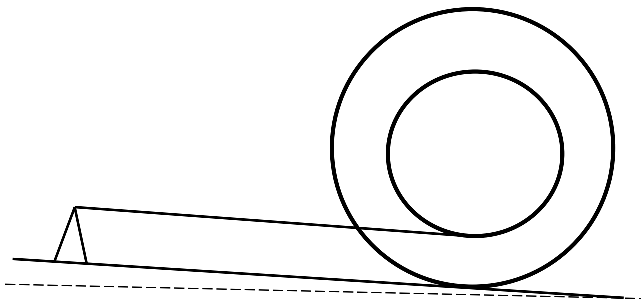


Положение равновесия лезвия, когда его центр масс находится над точкой опоры, неустойчиво: при небольшом смещении верхнего конца лезвия из равновесного положения на величину x возникает момент силы тяжести $M_T = \frac{2}{3}mgx$, который еще больше выводит лезвие из равновесия.

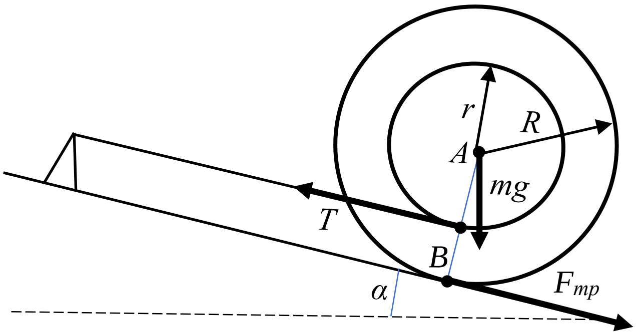
При наличии пружины отклоненное лезвие ее сожмет и создаст момент силы упругости $M_У$, противодействующий моменту силы тяжести. Для того, чтобы лезвие вернулось в положение равновесия, нужно, чтобы выполнилось неравенство $M_У + M_T \le 0$. Поскольку с интересующей нас точностью пружина сожмется на величину x, момент силы упругости $M_У = -kxh$. Необходимая жесткость пружины $k_{\min} = \dfrac{2mg}{3h}$.

Ответ: 21,8 Н/м или 21,8.

7. Катушка удерживается на наклонной плоскости с малым углом наклона легкой нитью, которая намотана на ее внутренний барабан и свободным концом прикреплена к выступу на плоскости. Нить выдерживает максимальное натяжение, равное двойной силе тяжести катушки. Угол наклона плоскости начинают медленно увеличивать. В некоторый момент времени одновременно рвется нить, и происходит проскальзывание катушки по плоскости. Определите отношение радиуса барабана к внешнему радиусу катушки. Коэффициент трения между катушкой и наклонной плоскостью равен μ=2.



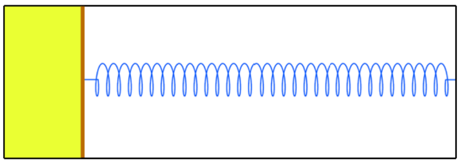
Возможное решение



Предположим, что нить рвется при угле плоскости к горизонту *α*, что радиус ее внутреннего барабана *r*, а внешний радиус *R*. На барабан действует сила тяжести *mg*, сила натяжения нити *T*, сила трения $F_{тр}$ и сила реакции опоры *N*.

Рассмотрим баланс моментов сил относительно центра катушки *A* (см. рисунок): $F_{тр}R = Tr$. Баланс моментов сил относительно оси *B*: $T(R-r) = mgR\sin(\alpha)$. Принимая во внимание, что сила $T = 2mg$, и из второго уравнения находим $\sin(\alpha) = 2\left(1-\frac{r}{R}\right)$. При проскальзывании $F_{тр} = \mu N = \mu mg\cos(\alpha)$, так что $\frac{r}{R} = \frac{F_{тр}}{T} = \frac{\mu\cos(\alpha)}{2}$. Обозначив $x = \frac{r}{R}$, и воспользовавшись соотношением $\sin^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)=1$, получим $5x^2-8x+4=0$. Условию задачи отвечает меньший корень уравнения x=0,6.

Ответ: 0,6 .



8. В трубке с закрытыми торцами и разделенной поршнем, с левой стороны находится идеальный газ, с правой – вакуум. Поршень поджат пружиной. Когда температура газа равна *T*, длина отсека, занятого газом, равна *L* = 1м. Если поднять температуру до 2*T*, эта длина будет 1.5*L*. Какой станет длина отсека с газом при температуре газа 3*T*? Трение между поршнем и трубкой отсутствует. Ответ приведите с точностью до 3 значащих цифр.

Возможное решение

Обозначим *P* давление газа при температуре *T*, площадь поршня *S*, коэффициент жесткости пружины *k*, ее начальное сжатие x_0. Условие равновесия будет $PS = kx_0$.

При температуре 2*T* объем газа увеличился в 1.5 раза, из объединенного газового закона $\frac{P_1\cdot 1{,}5LS}{2T} = \frac{P\cdot LS}{T}$ получаем новое значение давления $P_1 = \frac{4}{3}P$. Деформация пружины получается x_0 + *L*/2, условие равновесия $4PS/3 = k(x_0+L/2)$. Можем найти x_0 = 3*L*/2, *PS* = 3*kL*/2.

Обозначим через *y* длину отсека с газом при температуре 3*T*. Деформация пружины будет $x = y-L+x_0 = y+L/2$. Давление газа найдем из объединенного газового закона $\frac{PLS}{T} = \frac{P'yS}{3T}$, откуда $P' = \frac{3PL}{y}$. Условие равновесия

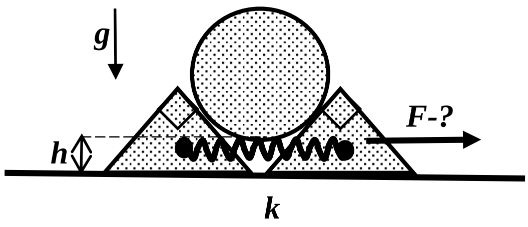
$$P'S = kx = \frac{3PyS}{L} = k(y+L/2) = \frac{PS}{3}\left(1+\frac{2y}{L}\right).$$

Отсюда получаем уравнение $2y^2+Ly-9L^2=0$, решением которого будет

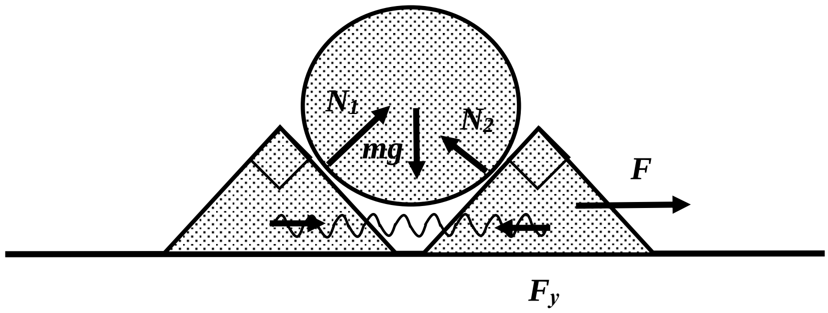
$$y = L\frac{\sqrt{73}-1}{4} \approx 1.89L.$$

Ответ: **1,89 м или 1,89.**

9. Два клина с сечением в виде равнобедренного прямоугольного треугольника положили на горизонтальную поверхность широкой гранью книзу, и стянули двумя пружинами жесткостью $k = 100$ Н/м каждая. На клинья положили цилиндр, он раздвинул клинья и остановился в равновесии, когда между ним и основанием оставался зазор h = 1 см. К правому клину начали прикладывать медленно увеличивающуюся силу, в результате чего система пришла в движение, и цилиндр стал постепенно, без колебаний, опускаться. При какой минимальной силе он коснется поверхности в основании конструкции? Все тела имеют одинаковую массу. Трения нет.

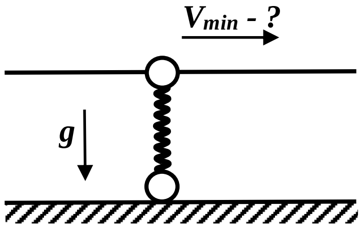


Возможное решение



На рисунке обозначены действующие силы. Поскольку части системы практически не движутся друг относительно друга, ускорение тел можно найти, рассматривая их как одно целое: $F = 3ma$, где m – масса каждого из тел, F – искомая сила. II закон Ньютона для цилиндра по горизонтали: $(N_1 - N_2)\frac{1}{\sqrt{2}} = ma$, равновесие цилиндра по вертикали: $(N_1 + N_2)\frac{1}{\sqrt{2}} = mg$. Здесь N_1, N_2 - силы реакции опоры со стороны клиньев. II закон Ньютона для правого клина: $ma = F + N_2\frac{1}{\sqrt{2}} - F_y$, где F_y - сила упругости пружины. Решая уравнения, находим: $N_2 = m(g-a)\frac{1}{\sqrt{2}}$, $F_y = \frac{mg+F}{2}$. Исходное растяжение пружин отвечает F = 0, так что вначале пружина растянута силой $F_{y1} = \frac{mg}{2}$. Для того, чтобы цилиндр опустился на высоту h, пружины должны дополнительно растянуться на $\Delta x = 2h$, увеличив силу упругости на $F_{y2} - F_{y1} = 2k\Delta x$. В итоге получаем необходимую силу: $F_{\min} = 8kh = 8$ Н.

Ответ: **8 Н или 8.**



10. Над горизонтальной поверхностью расположен горизонтальный стержень. По стержню, как по направляющей, может скользить бусинка массы m = 10 г. Она прикреплена к малому телу такой же массы, расположенному на поверхности, невесомой пружиной жесткости k = 10 Н/м. Бусинка расположена над телом. Трения нет. Пружина не деформирована, ее длина L = 10 см. Какую минимальную скорость надо придать верхней бусинке, чтобы в процессе колебаний нижнее тело оторвалась от поверхности. Затуханием колебаний пренебречь. Размеры бусинки и тела много меньше L. Ускорение свободного падения g = 10 м/с^2. Ответ приведите с точностью до 2 значащих цифр.

Возможное решение

ЗСИ: $mv = mv_1 + mv_2$

ЗСЭ: $\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2} + \frac{k(\Delta L)^2}{2}$

Максимальное расстояние между телами, когда $v_1 = v_2$.

Тогда $v_1 = v_2 = \frac{v}{2}$

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{m\left(\frac{v}{2}\right)^2}{2} + \frac{m\left(\frac{v}{2}\right)^2}{2} + \frac{k(\Delta L)^2}{2},$$

$$\Delta L = \sqrt{\frac{m}{2k}} \cdot v.$$

Вертикальная составляющая силы натяжения пружины должна превосходить действующую на тело силу тяжести:

$$k \cdot \Delta L \cdot \frac{L}{L+\Delta L} > mg,$$

$$\Delta L > \frac{mgL}{kL-mg},$$

$$\sqrt{\frac{m}{2k}} \cdot v > \frac{mgL}{kL-mg},$$

$$v_{min} = \sqrt{\frac{2k}{m}} \cdot \frac{mgL}{(kL-mg)} = \frac{\sqrt{2km} \cdot gL}{(kL-mg)} \approx 0{,}5 \text{ м/с}$$

Ответ: 0,50 м/с или 0,50.

11. Таблица ответов

№ задачи	**Ответ**
1	2,0 м/с или 2,0
2	1,13 кг или 1,13
3	$5{,}65 \cdot 10^{-5}$ Дж или $5{,}65 \cdot 10^{-5}$
4	8,38 Вт или 8,38
5	7
6	21,8 Н/м или 21,8
7	0,6
8	1,89 м или 1,89
9	8 Н или 8
10	0,50 м/с или 0,50